Метрические, нормированные и евклидовы пространства.

Множество L называется (вещественным) линейным пространством, если для любых двух его элементов x, y определен элемент $x+y\in L$ (называемый суммой x и y), и для любого элемента $x\in L$ и любого (вещественного) числа α определен элемент $\alpha x\in L$, причем выполнены следующие условия:

1) для любых элементов $x, y\in L$ $x+y=y+x$ (коммутативность сложения);
2) для любых элементов $x, y, z\in L$ $(x+y)+z=x+(y+z)$ (ассоциативность сложения);
3) существует элемент $0\in L$ (называемый нулевым элементом, или нулем пространства L) такой, что для любого элемента $x\in L$ $x+0=x$ (существование нулевого элемента);
4) для любого элемента $x\in L$ существует элемент $(-x)\in L$ (называемый обратным к x) такой, что $x+(-x)=0$ (существование обратного элемента);
5) для любых элементов $x,y\in L$ и любого (вещественного) числа α $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$ (дистрибутивность умножения суммы элементов на число);
6) для любых (вещественных) чисел α и β и любого элемента $x\in L$ $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$ (дистрибутивность умножения суммы чисел на элемент);
7) для любых (вещественных) чисел α, β и любого элемента $x\in L$ $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$ (ассоциативность умножения на число);
8) для любого элемента $x\in L$ $1x=x$ (свойство единицы).

Элементы линейного пространства называются векторами, поэтому линейное пространство иногда называется векторным.

Элементы линейного пространства L (векторы) $y_1, \ldots, y_n$ называются линейно независимыми, если их линейная комбинация $\alpha_1 y_1+\ldots+\alpha_n y_n\neq 0$ для любых чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, кроме $\alpha_1=\ldots=\alpha_n=0$. Векторы $y_1, \ldots, y_n$ линейно зависимы в том и только в том случае, когда по крайней мере один из них является линейной комбинацией остальных. Если максимальное число линейно независимых векторов пространства L конечно, то это число называется размерностью пространства L, а само линейное пространство называется конечномерным. В противном случае пространство L бесконечномерно.

В качестве примера линейного пространства можно привести изучаемое в курсе линейной алгебры конечномерное векторное пространство R^n. Еще один пример – пространство (вещественных) функций, определенных на отрезке $[a,b]$. Очевидно, что это пространство можно рассматривать как линейное, если определить сумму элементов и умножение на вещественное число обычным образом (как сумму функций и умножение функции на число). Нулевым элементом этого пространства является функция, тождественно равная нулю.

Подмножество L_1 линейного пространства L называется (линейным) подпространством L, если любая линейная комбинация элементов L_1 принадлежит L_1 (т.е. L_1 само является линейным пространством).

Множество M называется метрическим пространством, если для любых двух его элементов $x, y\in M$ определено вещественное число $\rho(x,y)$ (называемое метрикой, или расстоянием), причем выполнены следующие условия:

1) для любых элементов $x, y\in M$ $\rho(x,y)\geq 0$, и $\rho(x,y)=0$ тогда и только тогда, когда элементы x и y совпадают $(x=y)$ (неотрицательность метрики);

2) для любых элементов $x, y \in M$ $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ (симметричность метрики);
3) для любых элементов $x, y, z \in M$ $\rho(x,y) \le \rho(x,z)+\rho(y,z)$ (неравенство треугольника).

В метрическом пространстве можно определить понятие <u>сходимости последовательности элементов</u>. А именно, последовательность элементов $x_n \in M$, $n=1, 2, \ldots$, сходится к элементу $x_0 \in M$ (обозначается $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$), если $\rho(x_n, x_0) \to 0$ при $n \to \infty$.

Заметим, что метрическое пространство не обязательно является линейным.

Линейное пространство N называется <u>нормированным</u>, если для любого элемента $x \in N$ определено вещественное число $\| x \|$ (называемое нормой), причем выполнены следующие условия:

1) для любого элемента $x \in N$ $\| x \| \ge 0$, причем $\| x \| = 0$ тогда и только тогда, если $x = 0$;
2) для любого элемента $x \in N$ и любого (вещественного) числа α имеет место $\| \alpha x \| = |\alpha| \cdot \| x \|$ (неотрицательная однородность нормы);
3) для любых элементов $x, y \in N$ верно $\| x + y \| \le \| x \| + \| y \|$ (неравенство треугольника).

Нормированное пространство является метрическим, если положить $\rho(x, y) = \| x - y \|$.

В нормированном и метрическом пространствах можно ввести понятия открытого и замкнутого множества. В качестве упражнения предлагаем читателю сформулировать эти определения самостоятельно, аналогично тому, как это было сделано в курсе математического анализа.

Введем понятие <u>сходимости</u> последовательности <u>в нормированном пространстве</u>. Последовательность элементов $x_n \in N$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ сходится (по норме пространства N) к элементу $x_0 \in N$ (обозначается $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$), если $\| x_n - x_0 \| \to 0$ при $n \to \infty$.

Докажем теперь, что из сходимости по норме следует сходимость норм элементов последовательности к норме предельного элемента. Заметим сразу, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно (приведите пример).

Лемма. Если $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$, то $\| x_n \| \to \| x_0 \|$.

Примеры нормированных пространств.

1) Конечномерное евклидово пространство R^n, изучавшееся в курсе линейной алгебры.
2) Пространство $C[a,b]$ функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$. Норма в пространстве $C[a,b]$ определяется так: $\| y \|_{C[a,b]} = \max\limits_{s \in [a,b]} | y(s) |$. В качестве упражнения предлагаем читателю самостоятельно проверить выполнение аксиом линейного пространства и доказать корректность указанного определения нормы в $C[a,b]$.

Сходимость по норме пространства $C[a,b]$ называется <u>равномерной сходимостью</u>. Свойства равномерно сходящихся последовательностей непрерывных функций изучались в курсе математического анализа. В частности, был доказан критерий Коши равномерной сходимости, а именно, необходимым и достаточным условие равномерной сходимости функциональной последовательности является ее фундаментальность.

Определение. Последовательность x_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ элементов нормированного пространства N называется фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер K такой, что для любого $n > K$ и любого натурального p выполнено $\| x_{n+p} - x_n \| \le \varepsilon$.

Если последовательность сходится, то она фундаментальна. Доказательство этого факта практически дословно повторяет доказательство аналогичного факта из курса математического анализа и предоставляется читателю.

Если же любая фундаментальная последовательность сходится, то нормированное пространство называется полным.

Определение. Полное нормированное пространство называется банаховым.

Поскольку в курсе математического анализа было доказано, что критерий Коши является не только необходимым, но и достаточным условием равномерной сходимости, то, тем самым, было доказано, что пространство $C[a,b]$ является банаховым. Очевидно, свойством полноты обладает и пространство R^n (докажите это самостоятельно).

В дальнейшем нам потребуется также пространство функций, непрерывных с производными до p-го порядка включительно на сегменте $[a,b]$, сходимость в котором является равномерной со всеми производными до p-го порядка ($p \ge 0$ - целое число). Такое пространство обозначается $C^{(p)}[a,b]$ (очевидно, $C^{(0)}[a,b] = C[a,b]$). Можно ввести много различных норм в этом пространстве, порождающих указанный выше тип сходимости. Из всех таких (эквивалентных) норм для нас удобнее всего будет следующая:

$$\| y \|_{C^{(p)}[a,b]} = \sum_{k=0}^{p} \max_{s \in [a,b]} | y^{(k)}(s) | .$$

В качестве упражнения предлагаем проверить корректность указанного определения нормы и доказать, что пространство $C^{(p)}[a,b]$ является банаховым.

Определение. Линейное пространство E называется евклидовым, если для любых двух элементов $x, y \in E$ определено вещественное число (x, y), называемое скалярным произведением, причем выполнены следующие условия:

1) для любых элементов $x, y \in E$ верно $(x, y) = (y, x)$ (симметричность);
2) для любых элементов $x_1, x_2, y \in E$ выполняется равенство

2) для любых элементов $x_1, x_2, y \in E$ выполняется равенство $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ (аддитивность по первому аргументу);
3) для любых элементов $x, y \in E$ и любого вещественного числа α имеет место $(\alpha x, y) = \alpha (x, y)$ (однородность по первому аргументу).

Заметим, что в силу условий 1)-3) скалярное произведение обладает свойством линейности как по первому, так и по второму аргументу.

4) для любого $x \in E$ выполнено неравенство $(x, x) \ge 0$, причем $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, если $x = 0$ (неотрицательность скалярного квадрата).

Скалярное произведение порождает норму: $\| x \|_E = \sqrt{(x, x)}$. Проверьте самостоятельно справедливость аксиом нормы при таком ее определении.

В курсе линейной алгебры было доказано неравенство Коши-Буняковского: $| (x, y) | \le \| x \| \cdot \| y \|$, где равенство выполняется в том и только том случае, когда элементы x и y линейно зависимы. Аналогично доказывается, что неравенство Коши-Буняковского справедливо в любом евклидовом пространстве.

Примером конечномерного евклидова пространства является пространство n-мерных векторов R^n, изучавшееся в курсе линейной алгебры. Это пространство состоит из векторов-столбцов, а скалярное произведение в нем определяется как $(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n$, где $x_1,x_2,...,x_n$ и $y_1,y_2,...,y_n$ - компоненты векторов x и y соответственно. Отметим еще раз, что пространство R^n является полным.

Еще один пример евклидова, но уже бесконечномерного пространства встречался в курсе математического анализа. А именно, рассмотрим снова линейное пространство функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$, но введем норму с помощью скалярного произведения, а именно для любых непрерывных на $[a,b]$ функций $y_1(s)$, $y_2(s)$ положим

$$(y_1,y_2)=\int_a^b y_1(s)y_2(s)\,ds.$$

Проверьте самостоятельно корректность такого определения, т.е. справедливость аксиом скалярного произведения.

Пространство непрерывных функций с нормой, порожденной введенным скалярным произведением, обозначим $h[a,b]$. Итак,

$$\|y\|_{h[a,b]}=\sqrt{\int_a^b y^2(s)\,ds}\,.$$

Сходимость по норме $h[a,b]$ называется <u>сходимостью в среднем</u>. В курсе математического анализа было доказано, что из равномерной сходимости следует сходимость в среднем. Из сходимости же в среднем не следует не только равномерная, но даже поточечная сходимость (рекомендуем построить соответствующий пример).

Очевидно, что евклидово пространство $h[a,b]$ является бесконечномерным (приведите пример бесконечной последовательности линейно независимых непрерывных на $[a,b]$ функций). К сожалению, это пространство не является полным. На самом деле, легко построить последовательность функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$ (например, кусочно-линейных), которая сходится в среднем к разрывной функции

$$y(x)=\left[\begin{array}{ll} 0, \text{ при } & x\in\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right) \\ 1, \text{ при } & x\in\left[\dfrac{a+b}{2},b\right] \end{array}\right..$$

В качестве упражнения докажите, что такая функциональная последовательность является фундаментальной в $h[a,b]$, но не имеет предела в $h[a,b]$.

В качестве упражнения докажите, что такая функциональная последовательность является фундаментальной в $h[a,b]$, но не имеет предела в $h[a,b]$.

В курсе функционального анализа доказывается, что любое неполное нормированное пространство можно пополнить. Полное бесконечномерное евклидово пространство называется <u>гильбертовым</u>. Если пополнить пространство $h[a,b]$, то мы получим гильбертово пространство $L_2[a,b]$. Однако для того, чтобы описать, из каких элементов состоит это пространство, нужно знать не только интеграл Римана (который изучался в курсе математического анализа), но и интеграл Лебега. При изложении курса интегральных уравнений мы будем рассматривать пространство $h[a,b]$, понимая, что это пространство неполно. Но в этом пространстве легко определить, что такое ортогональность, поскольку в этом пространстве задано скалярное произведение.

Если же нам потребуется свойство полноты пространства, то будем рассматривать пространство $C[a,b]$. К сожалению, (и это доказывается в курсе функционального анализа) в пространстве $C[a,b]$ нельзя ввести эквивалентную норму, порожденную скалярным произведением, превратив таким образом это пространство в гильбертово, но сохранив в качестве сходимости по норме равномерную сходимость.

§3. Элементы теории линейных операторов.

Перейдем теперь к определению линейного оператора. Оператор A, действующий из линейного пространства L_1 в линейное пространство L_2 называется линейным, если для любых элементов y_1 и y_2 из L_1 и любых вещественных чисел α_1 и α_2 выполнено равенство $A(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A y_1 + \alpha_2 A y_2$.

Будем обозначать область определения оператора A как $D(A)$. Для простоты будем считать $D(A) = L_1$. Множество значений оператора A обозначим $R(A)$. В данном случае $R(A) \subseteq L_2$ - линейное подпространство пространства L_2.

Будем называть нуль-пространством оператора A множество $Ker\, A = \{x \in L_1 :\ Ax = 0\}$. Очевидно, что $Ker\, A$ – линейное подпространство L_1, причем $0 \in Ker\, A$. Если $Ker\, A \neq \{0\}$ (в этом случае говорят, что нуль-пространство нетривиально), то оператор A называется вырожденным.

Если оператор A взаимно однозначный, то можно ввести обратный оператор A^{-1} с областью определения $D(A^{-1}) = R(A)$ и множеством значений $R(A^{-1}) = D(A) = L_1$. Для линейного оператора вопрос о существовании обратного решается следующим образом: обратный оператор существует тогда и только тогда, когда оператор A не является вырожденным (докажите это самостоятельно).

В качестве основного примера линейного оператора рассмотрим интегральный оператор Фредгольма

$$Ay \equiv \int_a^b K(x,s)y(s)ds, \qquad x,s \in [a,b].$$

Если ядро $K(x,s)$ непрерывно по совокупности аргументов, что мы будем предполагать в течение всего курса, то в соответствии с теоремой о непрерывной зависимости от параметра собственного интеграла, доказанной в курсе математического анализа, оператор A действует в линейном пространстве функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$ и, очевидно, является линейным.

В дальнейшем мы будем рассматривать линейные операторы, действующие в нормированных пространствах. Пусть оператор A отображает нормированное пространство N_1 в нормированное пространство N_2 (для простоты будем считать, что $D(A) = N_1$).

Определение А. Оператор A называется непрерывным в точке $y_0 \in D(A)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $y \in D(A)$ и удовлетворяющих неравенству $\| y - y_0 \| \leq \delta$ выполняется неравенство $\| Ay - Ay_0 \| \leq \varepsilon$.

Как и в курсе математического анализа можно сформулировать второе определение непрерывности оператора в точке.

Определение Б. Оператор A называется непрерывным в точке $y_0 \in D(A)$, если для любой последовательности $y_n \in D(A)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, $y_n \to y_0$, последовательность Ay_n сходится к Ay_0.

Доказательство эквивалентности этих определений практически дословно повторяет аналогичное из курса математического анализа и предоставляется читателю.

Оператор A называется непрерывным на множестве $D(A)$ (на пространстве N_1), если он непрерывен в каждой точке этого множества. Оказывается, что линейный оператор непрерывен тогда и только тогда, когда он непрерывен в нуле. В самом деле,

если $y_n \to y_0$, то $y_n - y_0 \to 0$, а из линейности оператора вытекает, что $Ay_n \to Ay_0$ тогда и только тогда, когда $A(y_n - y_0) \to 0$.

Определение. Нормой оператора A называется

$$\|A\|_{N_1 \to N_2} = \sup_{\|y\|_{N_1}=1} \|Ay\|_{N_2}$$

Если это не будет вызывать разночтений, то для сокращения записи будем обозначать $\|A\|_{N_1 \to N_2} = \|A\|$.

Если $\|A\| < +\infty$, то оператор A называется ограниченным. Докажите самостоятельно, что в конечномерных пространствах любой линейный оператор является ограниченным.

Пример линейного неограниченного оператора. Рассмотрим пространство $C[0,1]$, которое, очевидно, является бесконечномерным пространством, и оператор дифференцирования $A = \dfrac{d}{ds}$, определенный на линейном подпространстве непрерывно дифференцируемых функций из $C[0,1]$.

Покажем, что A - неограниченный линейный оператор. Возьмем последовательность функций $y_n = \cos ns$. Тогда $\|y_n\| = \max\limits_{s \in [0,1]} |\cos\ ns| = 1$, но $\|Ay_n(s)\| = \|n \cdot \sin\ ns\| \to \infty$ при $n \to \infty$, что противоречит определению ограниченного оператора.

Теорема. Для любого $y \in N_1$ выполнено неравенство $\|Ay\| \le \|A\| \|y\|$, где A – линейный ограниченный оператор, действующий из нормированного пространства N_1 в нормированное пространство N_2.

Доказательство. 1). Для $y = 0$ (нулевой элемент пространства) теорема верна, так как $\|Ay\| = \|A0\| = 0 = \|A\| \cdot \|y\| = \|A\| \cdot 0$.

2). Рассмотрим теперь случай $y \neq 0$. Возьмем элемент $z = \dfrac{y}{\|y\|}$ - единичный вектор, т.к. $\|z\| = 1$. Тогда $\|Az\| = \left\| A \dfrac{y}{\|y\|} \right\| \le \|A\|$, из чего и следует утверждение теоремы.

Теорема. Линейный оператор $A: N_1 \to N_2$ является непрерывным тогда и только тогда, когда он ограничен.

Доказательство. Поскольку оператор A линейный мы будем исследовать непрерывность только в точке *0*.

1) Докажем, что из ограниченности следует непрерывность. Возьмем последовательность $y_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда $\|Ay_n\| \le \|A\| \cdot \|y_n\| \to 0$ и, следовательно, оператор A является непрерывным.

2) Докажем, что из непрерывности следует ограниченность. Предположим, что оператор A неограниченный. Тогда существует последовательность y_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ такая, что $\|y_n\| = 1$, а $\|Ay_n\| \ge n$. Следовательно, при $n \to \infty$ имеем $\left\|\dfrac{Ay_n}{n}\right\| \ge 1$, в то время как $\dfrac{y_n}{n} \to 0$, что противоречит определению непрерывности оператора *A*.

Покажем теперь, что интегральный оператор Фредгольма $Ay \equiv \int_a^b K(x,s) \cdot y(s)\, ds$, $x \in [a,b]$, является ограниченным из $h[a,b]$ в $h[a,b]$. Действительно, пусть $\|y\| = \sqrt{\int_a^b y^2(s)\, ds} = 1$ и $z = Ay$, тогда $|z(x)|^2 = |Ay|^2 = \left|\int_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds\right|^2$.

Из неравенства Коши-Буняковского следует, что для каждого фиксированного $x \in [a,b]$ верно $\left|\int_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds\right|^2 \le \int_a^b K^2(x,s)\, ds \cdot \int_a^b y^2(s)\, ds = \int_a^b K^2(x,s)\, ds.$

Интегрируя по x, получим $\|Ay\|^2 \le \int_a^b \int_a^b K^2(x,s)\, dx\, ds$. Поскольку правая часть неравенства не зависит от y, то

$$\|A\| \le \sqrt{\int_a^b \int_a^b K^2(x,s)\, dx\, ds} < +\infty,$$

что и требовалось доказать.

Докажите самостоятельно, что интегральный оператор Фредгольма является ограниченным также и при действии из $C[a,b]$ в $C[a,b]$, из $h[a,b]$ в $C[a,b]$ и из $C[a,b]$ в $h[a,b]$. Найдите оценки сверху для нормы оператора в каждом из этих случаев.

В дальнейшем нам потребуется следующая

Лемма. Пусть линейный ограниченный оператор A действует из нормированного пространства N_1 в нормированное пространство N_2, а линейный ограниченный оператор B действует из нормированного пространства N_2 в нормированное пространство N_3.

Тогда $\| BA \| \le \| B \| \cdot \| A \|$.

Доказательство. Для любого элемента $y \in N_1$ такого, что $\| y \| = 1$, имеет место неравенство $\| BAy \| \le \| B \| \cdot \| Ay \| \le \| B \| \cdot \| A \| \cdot \| y \| = \| B \| \cdot \| A \|$. Отсюда, с учетом определения нормы линейного оператора следует утверждение леммы.

Определение. Последовательность y_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ элементов нормированного пространства N называется ограниченной, если существует константа C такая, что $\| y_n \| \le C$ для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Определение. Последовательность y_n, $n = 1, 2, 3, ...$ элементов нормированного пространства N, обладающая тем свойством, что из любой ее подпоследовательности можно выделить сходящуюся, называется компактной.

Легко доказать, что любая компактная последовательность является ограниченной. На самом деле, если последовательность y_n, $n = 1, 2, 3, ...$ не является ограниченной, то найдется подпоследовательность y_{n_k} такая, что $\|y_{n_k}\| \geq k$, $k = 1, 2, ...$, из которой нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность.

Замечание. В пространстве R^1 критерий компактности последовательности определяется теоремой Больцано-Вейерштрасса: из любой ограниченной последовательности вещественных чисел можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Аналогичное утверждение имеет место и в пространстве R^n. Для бесконечномерных пространств это не так.

Примеры некомпактных последовательностей.

1) Последовательности вещественных чисел $x_n = n$, $n = 1, 2, 3, ...$ является некомпактной, так как ясно, что из этой последовательности нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность.

2) Числовая последовательность $1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ \dots$ также некомпактна. Несмотря на то, что из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность, однако нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность из *любой ее подпоследовательности*.

Примеры ограниченных некомпактных последовательностей в бесконечномерном пространстве.

3) Рассмотрим пространство $h[a,b]$. В курсе математического анализа было доказано существование в $h[a,b]$ ортонормированной системы, состоящей из бесконечного числа элементов (например, тригонометрической системы функций):

$$e_n,\ n = 1,2,...\ ,\ \|e_j\| = 1,\ \ (e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}.$$

Покажем, что из последовательности членов ортонормированной системы (эта последовательность, очевидно, является ограниченной) нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность. В самом деле, $\|e_i - e_j\|^2 = (e_i - e_j, e_i - e_j) = 2$, $i \neq j$ $\Rightarrow \|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$, если $i \neq j$. Поэтому никакая подпоследовательность этой последовательности не может быть фундаментальной, а, следовательно, и сходящейся.

4) Рассмотрим теперь последовательность $e_1, c, e_2, c, e_3, c, ...$ (c – фиксированный вектор из $h[a,b]$). Эта последовательность также некомпактна – из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность, но нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность из любой ее подпоследовательности.

В качестве упражнения постройте самостоятельно пример ограниченной, но некомпактной последовательности элементов пространства $C[a,b]$.

Сформулируем теперь определение вполне непрерывного линейного оператора, действующего из нормированного пространства N_1 в нормированное пространство N_2.

Определение. Линейный оператор A называется вполне непрерывным, если для любой ограниченной последовательности элементов y_n из N_1 последовательность $z_n = Ay_n$ элементов N_2 такова, что из любой ее подпоследовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Таким образом, вполне непрерывный оператор преобразует любую ограниченную последовательность в компактную.

Теорема. Вполне непрерывный оператор является ограниченным (а, следовательно, непрерывным).

Доказательство. Предположим, что вполне непрерывный оператор A не является ограниченным. Тогда найдется последовательность $y_n \in N_1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, $\|y_n\| = 1$, такая, что $\|Ay_n\| \geq n$. Но тогда из последовательности $z_n = Ay_n$ нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность, что противоречит тому, что A – вполне непрерывный оператор.

Заметим, что не любой непрерывный линейный оператор является вполне непрерывным.

Пример. Рассмотрим единичный оператор $I : h[a,b] \to h[a,b]$, т.е. такой, что $Iy = y$ для любого $y \in h[a,b]$. Очевидно, указанный оператор является ограниченным.

Докажем, что он не является вполне непрерывным. Для этого достаточно рассмотреть последовательность членов ортонормированной системы из разобранного выше примера 3) и заметить, что последовательность $Ie_n = e_n$ некомпактна.

Теорема. Пусть A - оператор Фредгольма, действующий из $h[a,b]$ в $h[a,b]$. Тогда A - вполне непрерывный оператор.

В дальнейшем нам потребуется аналогичное утверждение и для интегрального оператора типа Вольтерра. Читателям предлагается доказать его самостоятельно.

Пусть линейный оператор A действует $A : E \to E$ (E - бесконечномерное евклидово пространство).

Определение. Оператор $A^* : E \to E$ будем называть сопряженным к оператору A, если для любых y_1, $y_2 \in E$ имеет место $(Ay_1, y_2) = (y_1, A^* y_2)$.

В качестве упражнения докажите, что A^* также является линейным оператором.

Пусть A - ограниченный оператор. Покажем, что $\|A\| = \|A^*\|$. Пусть y - любой элемент из E такой, что $\|y\| = 1$. Тогда

$$\|Ay\|^2 = (Ay, Ay) = (A^* Ay, y) \leq \|A^* Ay\| \cdot \|y\| \leq \|A^*\| \cdot \|Ay\| \leq \|A^*\| \cdot \|A\| \cdot \|y\| = \|A^*\| \|A\|.$$

Поэтому для любого $y \in E$, такого, что $\|y\| = 1$, выполнено неравенство $\|Ay\|^2 \leq \|A^*\| \cdot \|A\|$. Отсюда $\|A\|^2 \leq \|A^*\| \cdot \|A\|$.

Проведя аналогичные рассуждения для оператора A^*, получим $\|A^*\|^2 \leq \|A^*\| \cdot \|A\|$. Из этих двух неравенств получаем, что $\|A\| = \|A^*\|$.

Определение. Если $A = A^*$, то оператор A называется самосопряженным (или симметрическим).

Рассмотрим оператор Фредгольма $Ay \equiv \int\limits_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds$, действующий из $E = h[a,b]$ в $E = h[a,b]$. Для любых y_1, $y_2 \in E$ имеем

$$(Ay_1, y_2) = \int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b K(x,s)\, y_1(s)\, ds \right) y_2(x)\; dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b K(x,s)\, y_2(x)\, dx \right) y_1(s)\; ds = (y_1, A^* y_2).$$

В то же время $(y_1, A^* y_2) = \int_a^b \left(\int_a^b K^*(s,x)\, y_2(x)\, dx \right) y_1(s)\, ds$, поэтому $K^*(s,x) = K(x,s)$.

Итак, A^* - оператор, сопряженный к оператору Фредгольма с ядром $K(x,s)$, также является оператором Фредгольма с ядром $K^*(x,s) = K(s,x)$, $x,s \in [a,b]$.

Если $K(x,s) = K(s,x)$ для любых $x,s \in [a,b]$, то ядро $K(x,s)$ называется симметрическим. В этом случае интегральный оператор является самосопряженным (при действии из E в E). Докажите сами, что если ядро интегрального оператора не является симметрическим, то оператор не является самосопряженным. Напомним, что ядра рассматриваемых нами интегральных операторов непрерывны по совокупности аргументов.